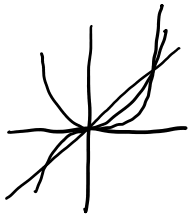


10.1 函数列的一致收敛

2024年3月7日 星期四 13:48

定义: 设 $E \subset \mathbb{R}$,

$f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ 是定义在 E 上的一列函数, 则称该列函数为 E 上的一个函数列, 记作 $\{f_n\}$ 或 $f_1, f_2, \dots$



$f_1(x) = x$
 $f_2(x) = x^2$
 $f_3(x) = x^3$
 $\vdots$
 $D = [0, 1]$

极限函数
 $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

设 $x_0 \in E$
若 $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛, 则称函数列 $\{f_n\}$ 在点 x_0 收敛

称 $\{x \in E: \{f_n(x)\} \text{ 收敛}\}$ 为 $\{f_n\}$ 的收敛域

设 $D \subset E$, 若 $\forall x \in D$ 有 $\{f_n\}$ 在点 x 收敛, 则可定义

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$

并称 f 为 $\{f_n\}$ 在 D 上的极限函数, 也称 $\{f_n\}$ 在 D 上收敛于 f

↑ 将通项中的 $n \rightarrow +\infty$ (x 为参)

$\{f_n\}$ 在 D 上逐点收敛于 f , 是指

$\forall x \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon, x) \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N(\varepsilon, x)$ 时, 有 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$\{f_n\}$ 在 D 上收敛于 f , 是指 **强调一致性**, 用一个 ε 将整个函数列加以限制

$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N(\varepsilon)$ 时, 对 $\forall x \in D$ 有 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$\{f_n\}$ 在 D 上不收敛于 f 是指

$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{Z}^+, \exists n > N$, 有 $x \in D$, 有 $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$

例: 证明: $f_n(x) = x^n, n=1, 2, \dots$ 在 $[0, 1]$ 上不收敛连续

证: $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

取 $\varepsilon_0 = 1/2, \forall N$, 令 $n = N+1, x = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{n}} \in [0, 1]$
有 $|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{2} \geq \varepsilon_0$

从而结论成立!

问: 任取 $0 < \delta < 1, f_n(x) = x^n, n=1, 2, \dots, n$ 在 $[0, 1-\delta]$ 上是否一致收敛

分析: $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0, x \in [0, 1-\delta]$

$\forall x \in [0, 1-\delta], \forall n \geq 1$

$|f_n(x) - f(x)| = x^n \leq (1-\delta)^n$

当 $n > N$ 时, 令 N 满足此不等式
 $\leq (1-\delta)^N = \varepsilon$

柯西收敛准则 函数列 $\{f_n\}$ 在 D 上收敛于某函数 f 理解:

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+$, 有 $n, m > N$ 时, 对 $\forall x \in D$, 有 $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

证: ($\Rightarrow$) 只需利用 $|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < 2\varepsilon$

($\Leftarrow$) $\forall x \in D$, 由性质 (P) 成立, 可知 $\{f_n(x)\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的一个柯西数列
从而由实数的柯西收敛准则, $\{f_n(x)\}$ 收敛, 记其极限为 $f(x)$
由此定义了 D 上的函数 f .

在性质 (P) 中, 固定 n , 令 $m \rightarrow \infty$, 可得 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时,

$\forall x \in D$, 有 $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

从而 $\{f_n\}$ 在 D 上收敛于 f

$\{f_n\}$ 在 D 上收敛于 f

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, $\forall x \in D$, 有 $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$
记作 M_n

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, 有 $M_n \leq \varepsilon$ (且 $M_n \geq 0$)

$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0$

性质: 设函数列 $\{f_n\}$ 在 D 定义, f 在 D 上有定义

$\star \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$

则 $\{f_n\}$ 在 D 上收敛于 $f \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0$

$\Leftarrow$ 等价于定义的判定法

内闭一致收敛

设函数列 $\{f_n\}$ 与 f 都定义在区间 I 上, 若对于 I 的任一闭子区间 $[a, b]$ 都有 $\{f_n\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 f , 则称 $\{f_n\}$ 在 I 上内闭一致收敛于 f

习题:

7. 设 $S_0(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续, 令

$S_n(x) = \int_0^x S_{n-1}(t) dt, n=1, 2, \dots$

证明: $\{S_n(x)\}$ 在 $[0, a]$ 上一致收敛于 0.

令 $M_n = \sup_{x \in [0, a]} |S_n(x)|$

证: $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0$

由 $S_0(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续, 从而有界, $\exists k > 0$,

使 $|S_0(x)| \leq k, x \in [0, a]$

故 $|S_1(x)| \leq kx, |S_2(x)| \leq \frac{1}{2} kx^2, |S_3(x)| \leq \frac{1}{6} kx^3$

$\dots |S_n(x)| \leq \frac{1}{n!} kx^n \leq \frac{1}{n!} ka^n$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} ka^n = 0 \rightarrow M_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$

设 $S'(x)$ 在区间 (a, b) 上连续,

$S_n(x) = n \left[S\left(x + \frac{1}{n}\right) - S(x) \right] = S'\left(\xi_{x,n}\right)$

证明: $\{S_n(x)\}$ 在 (a, b) 上内闭一致收敛于 $S'(x)$.

$\xi_{x,n} \in (x, x + \frac{1}{n})$

分析: $\forall [c, d] \subset (a, b)$

$\forall \varepsilon > 0$, 由 $S'(x)$ 在 $[c, d]$ 上连续, 从而一致连续

$\exists \delta > 0$, 当 $x', x'' \in [c, d]$, 只要 $|x' - x''| < \delta$, 就有

$|S'(x') - S'(x'')| < \varepsilon$

略微打大即可!

小漏洞 $\xi_{x,n}$ 不一定在 $[c, d]$

令 $N = \frac{1}{\delta}$, 当 $n > N$ 时,

$\forall x \in [c, d]$, 由 Lagrange 中值定理, $\exists \xi_{x,n} \in (x, x + \frac{1}{n})$

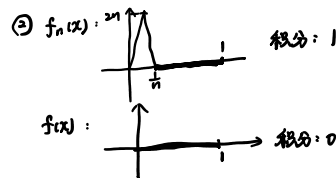
使 $S_n(x) = S'(\xi_{x,n})$

于是 $|S_n(x) - S'(x)| \leq \frac{1}{n} = \delta$, 故 $|S'(\xi_{x,n}) - S'(x)| \leq \varepsilon$

即 $|S_n(x) - S'(x)| < \varepsilon$

可积性: ① $f_n(x) = \begin{cases} 0 & (n!) \cdot x \in \mathbb{Z} \text{ 且 } x \in [0, 1] \\ 1, & [0, 1] \text{ 中其它点} \end{cases}$

$\downarrow$
 $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 1, & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ 不可积



通项函数的积分的极限
 $\neq$ 极限函数的积分

可导性: ① $f_n(x) = x^n, n=1, 2, \dots$
 $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

② $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin nx, n=1, 2, \dots, x \in [-1, 1]$

$f(x) = 0, f'(x) = 0$

$f'_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot n \cos nx = \sqrt{n} \cos nx$

$f'_n(x) = \sqrt{n} \rightarrow f'(x) (n \rightarrow \infty)$

→ 例: 令 $f_n(x) = nx e^{-nx^2}$, $x \in (0, +\infty)$, $n = 1, 2, \dots$

判断 $\{f_n\}$ 在 $(0, +\infty)$ 上的一致收敛性

证: $\forall x \in (0, +\infty)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nx e^{-nx^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{nx^2}{e^{nx^2}} \cdot \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{x} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^t} = 0$$

故极限函数为 $f(x) = 0$, $x \in (0, +\infty)$

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1, \text{ 令 } M_n &= \sup \{ |f_n(x) - f(x)| : x \in (0, +\infty) \} \\ &= \sup \{ nx e^{-nx^2} : x \in (0, +\infty) \} \end{aligned}$$

以 x 为主元求最大值
↑
 n 的函数

$$\geq \frac{n}{e\sqrt{n}} \quad (\text{取 } x = \frac{1}{\sqrt{n}})$$

故 $M_n \rightarrow 0$, 故 $\{f_n\}$ 并不一致收敛

推论: $\{f_n\}$ 在 D 上不一致收敛于 f

$$\Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset D, \text{ 使 } |f_n(x_n) - f(x_n)| \not\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty)$$

一定要注意函数项级数本质是函数形成的数列构成的级数。这些函数在某些 x (收敛域) 中很趋近于某一个函数 (极限函数)

$$f_1, f_2, \dots, f_n, \dots \rightarrow f$$

$x \left\{ \begin{array}{l} \text{在这些 } x \text{ 下构成的级数是收敛的。} \end{array} \right.$

10.2 一致收敛级数判别与性质

2024年3月12日 星期二 12:04

定义: (函数项级数及收敛域和函数的定义)

设 $E \subset \mathbb{R}$, $\{u_n(x)\}$ 是定义在 E 上的一个函数列

称表达式 (或形式和)

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

称为函数项级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x)$

定义: $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$ $x \in E$, $n=1, 2, \dots$

称 $\{S_n(x)\}$ 为函数项级数 $\sum u_n(x)$ 的部分和函数列

设 $x_0 \in E$, 若 $\{S_n(x)\}$ 在点 x_0 收敛 (或发散), 则称 $\sum u_n(x)$

在点 x_0 收敛 (或发散)

$\sum u_n(x)$ 的收敛域定义为 $\{S_n(x)\}$ 的收敛域

设 $D \subset E$, 若 $\{S_n(x)\}$ 在 D 上收敛, 其极限函数为 $S(x)$

则称函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在 D 上收敛, 其和函数为 $S(x)$

记作 $\sum u_n(x) = S(x)$, $x \in D$

和函数构成收敛函数列

定义: 设 $\sum u_n(x)$ 在 D 上的函数项级数, 如果它的部分和

函数列在 D 上一致收敛于函数 $S(x)$, 则称 $\sum u_n(x)$ 在 D 上

一致收敛于 $S(x)$

$\{S_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛 $\Leftrightarrow$ 柯西 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+, \forall m > n > N$ 及 $x \in D$

$$\text{有 } |S_m(x) - S_n(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \sum_{k=n+1}^m u_k(x) \right| < \varepsilon$$

函数项级数的柯西收敛准则 (等价于函数项级数的柯西收敛准则)

$\sum u_n(x)$ 在 D 上一致收敛 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+, \forall n > N$ 及 $\forall p \in \mathbb{Z}^+$

对 $\forall x \in D$, 有 $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon$

要证明不一致收敛

$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{Z}^+, \exists n \geq N, \exists p \in \mathbb{Z}^+$

$\exists x \in D, \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| \geq \varepsilon$

一般取 $p=n$

($\Rightarrow$ 取 $p=1$) $\{u_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于 0

$$f_n(x) \Rightarrow f(x) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

推论: $\sum U_n(x)$ 在 D 上一致收敛于 $S(x)$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |S_n(x) - S(x)| = 0$$

设 $S(x)$ 是 $\sum U_n(x)$ 在 D 上的和函数

$$\text{令 } R_n(x) = S(x) - S_n(x) \quad x \in D$$

称其为 $\sum U_n(x)$ 的第 n 个余项

例 求 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 的收敛域, 并判断它在收敛域内的收敛性质.

分析: $S_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k = \begin{cases} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & x \neq 1 \\ n+1 & x = 1 \end{cases}$

用洛必达法则: $|x| < 1$ 时, $\{S_n(x)\}$ 收敛, 且 $S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \frac{1}{1-x}, |x| < 1$.

从而收敛域为 $(-1, 1)$

由 $\sup_{x \in (-1, 1)} |S_n(x) - S(x)| = \sup_{x \in (-1, 1)} \frac{x^{n+1}}{1-x} \geq \frac{(1-\frac{1}{n})^{n+1}}{1-(1-\frac{1}{n})} = n \cdot (1-\frac{1}{n})^n (1-\frac{1}{n}) \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$

从而不一致收敛.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^{n+1}}{1-x} = +\infty \Rightarrow \sup_{x \in (-1, 1)} \frac{x^{n+1}}{1-x} = +\infty$

Weierstrass M 判别法 (优级数判别法)

设 $\sum U_n(x)$ 是 D 上的一个函数项级数

设 $\sum M_n$ 是收敛的正项级数

若 $\forall n \geq 1$, 及 $\forall x \in D$, 有 $|U_n(x)| \leq M_n$

则 $\sum U_n(x)$ 在 D 上一致收敛

$\forall \varepsilon > 0$, 由 $\sum M_n$ 收敛, $\exists N \in \mathbb{Z}^+$, $\forall n > N$ 及 $p \in \mathbb{Z}^+$

$$\text{有 } \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k \right| < \varepsilon.$$

从而当 $n > N$ 时, $\forall p \in \mathbb{Z}^+$ 及 $x \in D$ 有

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} U_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |U_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k < \varepsilon \quad \text{得证!}$$

称 $\sum M_n$ 为 $\sum U_n(x)$ 的一个优级数

例: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \cos(\pi b^n x), \quad x \in \mathbb{R}$$

其中 $0 < \lambda < 1$ $\lambda b < 1$

用级数来估计它

以 x 为主元, 求最值后构成 n 的表达式, 以此为 M_n , 接着证明该级数收敛即可

Dirichlet 判别法 (对每一个 $x \in D$ 运用级数的 D.M 判别法)

若 (i) $\sum u_n(x)$ 的部分和函数列 $\{S_n(x)\}$ 在 D 上一致有界

即 $\exists M > 0, \forall n \geq 1, \text{及 } x \in D \text{ 有 } |S_n(x)| \leq M$

(ii) $\forall x \in D, \{v_n(x)\}$ 关于 n 单调

(iii) $\{v_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于 0

则 $\sum u_n(x) v_n(x)$ 在 D 上一致收敛

Abel 判别法

若 (i) $\sum u_n(x)$ 在 D 上一致收敛

(ii) $\forall x \in D, \{v_n(x)\}$ 关于 n 单调

(iii) $\{v_n(x)\}$ 在 D 上一致有界

则 $\sum u_n(x) v_n(x)$ 在 D 上一致收敛

例: 若级数 $\sum a_n$ 收敛, 则 $\sum a_n x^n$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛

例: $\sum \frac{(-1)^n (x+n)^n}{n^{n+1}} \quad D=[0, 1] \quad \text{一致收敛性?}$

令 $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n} \quad \sum u_n(x)$ 在 D 上一致收敛

$$v_n(x) = \left(\frac{x+n}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$\forall x, \{v_n(x)\}$ 关于 n 单调 $\cdot \begin{cases} x=0 \checkmark \\ x \in (0, 1] \end{cases}$

$$v_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x} \cdot x}$$

$f(t) = (1 + \frac{1}{t})^t \rightarrow$ 单调递增

例: 若 $\{a_n\}$ 单调收敛于 0, 则

$\sum a_n \cos nx$ 与 $\sum a_n \sin nx$ 在 $(0, 2\pi)$ 上内闭一致收敛

即证 $\forall 0 < \alpha < \pi$, 有 $\sum a_n \cos nx$ 在 $[\alpha, 2\pi - \alpha]$ 上一致收敛

$$\text{令 } v_n(x) = a_n \quad u_n = \cos nx$$

$$\left| 2 \sin \frac{x}{2} \sum_{k=1}^n \cos kx \right| = \sum_{k=1}^n \left[\sin(k + \frac{1}{2})x - \sin(k - \frac{1}{2})x \right] \leq 2$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{k=1}^n \cos kx \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \leq \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

例: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos nx$ 在 $[0, 2\pi]$ 上不收敛

柯西: 找 $\varepsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbb{Z}^+, \text{找 } n \geq N \text{ 及 } p \in \mathbb{Z}^+ \text{ 且 } \pi \in [0, 2\pi]$

$$\text{使 } \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} \cos kx \right| \geq \varepsilon_0$$

$$\text{取 } \frac{\pi}{6} \leq kx \leq \frac{\pi}{3} \quad \text{LHS} \geq \frac{1}{n+p} \cdot p = \frac{1}{4}$$

$$\text{取 } \frac{\pi}{6} \leq kx \leq \frac{\pi}{3} \quad \text{LHS} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+p} \cdot p = \frac{1}{4}$$

$$\frac{\pi}{6} < Nx < kx \leq 2Nx < \frac{\pi}{3}$$

$$x = \frac{\pi}{6N}$$

一致收敛的函数列与数项级数的性质

连续性
可积性
可微性

连续性：设 $f_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛

并且 $n \geq 1$ ，有 $f_n(x)$ 在区间 I 上连续

则其极限函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续。

分析：即证 $\forall x_0 \in I$ ， $f(x)$ 在点 x_0 连续。

$\forall \varepsilon > 0$ ，找 $\delta > 0$ ，使 $\forall x \in D(x_0, \delta) \cap I$ 时

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

由 $\{f_n\}$ 在 I 上一致收敛， $\exists N \in \mathbb{Z}^+$ ，当 $n \geq N$ 时，

$$\forall x \in I, \text{ 有 } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

由 f_n 在点 x_0 连续， $\exists \delta > 0$ ，使 $\forall x \in D(x_0, \delta) \cap I$ 时

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$$

从而 $\forall x \in D(x_0, \delta) \cap I$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$$

$$< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$$

增加一种证明
非一致收敛的方法

推论：设 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 上收敛于某函数 $f(x)$

若 $\forall n \geq 1$ ， $f_n(x)$ 在 I 上连续，但 $f(x)$ 在 I 上不连续，

则 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 上不收敛（于 f ）

→ 例： $f_n(x) = x^n$ ， $x \in [0, 1]$ ， $n = 1, 2, \dots$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

极限性质：

设函数列 $\{f_n\}$ 在 $(a, x_0) \cup (x_0, b)$ 上一致收敛于 f ，且

条件1

$\forall n \geq 1$ ， $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = a_n \in \mathbb{R}$ (条件2)

则 $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在，与 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在且相等

缺一不可

当 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛时

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

令 $f_n(x_0) = a_n$, 则 $\{f_n\}$ 在点 x_0 连续

极限符号可交换

只需证: $\{a_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow \{f_n\}$ 是柯西数列

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+, \text{ 当 } m, n > N \text{ 时, } \forall x \in D, \text{ 有 } |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

固定 $m, n > N$, 由条件 (*) $\exists \delta_1, \delta_2 > 0$

当 $x \in O^*(x_0, \delta_1) \cap D$, 有 $|f_m(x) - a_m| < \varepsilon$

当 $x \in O^*(x_0, \delta_2) \cap D$, 有 $|f_n(x) - a_n| < \varepsilon$

令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

取 $x \in O^*(x_0, \delta) \cap D$, 则有 $|a_m - a_n| \leq |a_m - f_m(x)| + |f_m(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - a_n|$

$$< 3\varepsilon$$

可积性质

设 $\{f_n(x)\}$ 在闭区间 $[a, b]$ 上 一致收敛, 并且 $\forall n \geq 1$, 有 $f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积

则其极限函数 $f(x)$ 也在 $[a, b]$ 上可积 $\rightarrow$ 不一定是一致收敛

例: 设 $a_n > 0, n \geq 1$



$$f(x) = 0 \quad x \in [0, 1] \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0$$

当一致收敛时要证 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ $\nearrow$ 显然不需要这么强的条件.

$\forall \varepsilon > 0$, 找

$$T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$$

使 $\sum_{i=1}^n W_i^f \Delta x_i < C\varepsilon$ (C 与 T 无关)

$$\text{其中 } W_i^f = \sup_{x', x'' \in (x_{i-1}, x_i]} |f(x') - f(x'')| = \sup_{x \in \Delta_i} f(x) - \inf_{x \in \Delta_i} f(x)$$

由 f_n 在 $[a, b]$ 上可积, 故存在

$$T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b\}$$

使 $\sum_{i=1}^m W_i^{f_n} \Delta x_i < \varepsilon$. 其中 $W_i^{f_n} = \sup\{f_n(x') - f_n(x''), x', x'' \in \Delta_i\}$

注意到 $\forall x', x'' \in \Delta_i, |f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - f_n(x')| + |f_n(x') - f_n(x'')| + |f_n(x'') - f(x'')| < 2\varepsilon + W_i^{f_n}$

$$\text{于是 } W_i^f \leq 2\varepsilon + W_i^{f_n}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^m W_i^f \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^m (2\varepsilon + W_i^{f_n}) \cdot \Delta x_i < 2\varepsilon(b-a) + \varepsilon = [2(b-a) + 1] \cdot \varepsilon$$

$\Rightarrow f$ 在 $[a, b]$ 上可积

$$\text{且 } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

$$n \geq N \text{ 时, } \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right|$$

$$= \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right|$$

$$\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx < \varepsilon(b-a)$$

可微性定理1 设 $\{f_n\}$ 是定义在 $[a, b]$ 上的函数列, 并且满足

(1) $\forall n \geq 1, f_n$ 在 $[a, b]$ 上有连续的导函数

(2) $\{f_n\}$ 在 $[a, b]$ 上(点态)收敛于 f

(3) $\{f'_n\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 g

则 f 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $f'(x) = g(x), x \in [a, b]$

分析: 由(1), $\{f'_n\}$ 是连续的函数列

(利用连续性, f'_n 连续且一致收敛于 g , 从而 g 连续)

再由(3)及一致收敛的连续性, g 在 $[a, b]$ 上连续

$\forall x \in (a, b), \{f'_n\}$ 在 $[a, x]$ 上一致收敛, 且是连续的函数列

从而由一致收敛的可积性

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f'_n(t) dt = \int_a^x g(t) dt$$

$\hookrightarrow N-L$ 定理

$$\text{又上式左边 } \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x) - f_n(a)) = f(x) - f(a)$$

$$\text{从而 } f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt$$

由原函数存在定理 (g 连续, 从而 $f(x)$ 可导)

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x g(t) dt = g(x)$$

可交换

$$f'(x) = g(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx} (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{d}{dx} f_n(x))$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)) dx$$

可微性定理2 设 $\{f_n\}$ 是定义在 $[a, b]$ 上的函数列, 并且满足

(1) $\forall n \geq 1, f_n$ 在 $[a, b]$ 上可导

(2) $\exists x_0 \in [a, b]$, 使 $\{f_n(x_0)\}$ 收敛 (有一个点就行)

(3) $\{f'_n\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 g

则 $\{f_n\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于某函数 f , f 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $f'(x) = g(x), x \in [a, b]$ (*)

证: $\forall \varepsilon > 0$, 由(3), $\exists N_1 \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n, m > N_1$ 时, $\forall x \in [a, b]$, 有 $|f'_n(x) - f'_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

由(2), $\exists N_2 \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n, m > N_2$ 时, 有 $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$

于是当 $n, m > \max\{N_1, N_2\}$, $\forall x \in [a, b]$ 有

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|$$

$$\text{令 } g_{n,m}(x) = f_n(x) - f_m(x)$$

$\exists \xi_{n,m}$ 介于 x 与 x_0 之间.

$\downarrow$ 柯西中值定理

$$= |f'_n(\xi_{n,m}) - f'_m(\xi_{n,m})| \cdot |x - x_0| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

从而 $\{f_n\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛, 记极限函数为 f

下证 (*) 式, 即证: $\forall x \in [a, b]$, 有

$$\lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = g(x)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow x} \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x}$$

$$\lim_{t \rightarrow x} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x}$$

$$\text{记 } \varphi_n(t) = \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x} \quad t \in [a, b] \setminus \{x\} \quad n = 1, 2, \dots$$

由极限性质, 只需证: $\{\varphi_n\}$ 在 $[a, b] \setminus \{x\}$ 上一致收敛

(已有: $\forall n \geq 1, \lim_{t \rightarrow x} \varphi_n(t)$ 存在)

$$|\varphi_n(t) - \varphi_m(t)| = \frac{1}{|t - x|} |(f_n(t) - f_n(x)) - (f_m(t) - f_m(x))|$$

$$= \frac{1}{|t - x|} \cdot |(f_n(t) - f_m(t)) - (f_n(x) - f_m(x))|$$

令 $\xi_{n,m}(t) = f_n(t) - f_m(t)$, $\exists$ 介于 t 与 x 之间的 $\xi_{n,m}$

$$= |f'_n(\xi_{n,m}) - f'_m(\xi_{n,m})| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

推论: 设 $\{f_n\}$ 是定义在区间 I 上的函数列, 并且满足

(1) $\forall n \geq 1, f_n$ 在区间 I 上可导

(2) $\exists x_0 \in I$ 使 $\{f_n(x_0)\}$ 收敛

(3) $\{f'_n\}$ 在 I 上内闭一致收敛于 g

则 $\{f_n\}$ 在区间 I 上内闭一致收敛于某函数 f , 并且 $f'(x) = g(x), x \in I$

例: 考察 $f_n(x) = \frac{1}{2n} \ln(1 + n^2 x^2), 0 \in [0, 1], n = 1, 2, \dots$ 的可微性

$\forall x \in (0, 1]$, 有 $f'(x) = g(x)$

$$(1) f_n(x) \text{ 在 } [0, 1] \text{ 上可导 } f'_n(x) = \frac{1}{2n} \frac{2n^2 x}{1 + n^2 x^2} = \frac{nx}{1 + n^2 x^2}$$

$$(2) \text{ 当 } x = \frac{1}{n} \text{ 时 } \left\{ \frac{1}{1+n} \right\} \text{ 收敛}$$

$$(3) \left\{ \frac{nx}{1+n^2 x^2} \right\} \text{ 在 } [0, 1] \text{ 时}$$

$$\text{取 } x = \frac{1}{n} \quad \frac{nx}{1+n^2 x^2} - 0 = \frac{1}{2} \text{ 从而 } \frac{nx}{1+n^2 x^2} \text{ 并非一致收敛}$$

而在 $(0, 1]$ 时内闭一致收敛

逐项求积公式

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) dx = \int_a^b S(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b S_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_a^b U_k(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b U_n(x) dx$$

逐项求导

若 $\sum U_n(x)$ 为 $[a, b]$ 上的函数项级数, 若

- (1) $\forall n \geq 1, U_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导
 - (2) $\exists x_0 \in [a, b]$, 使 $\sum U_n(x_0)$ 收敛
 - (3) $\sum U_n'(x)$ 在 $[a, b]$ 上 一致收敛
- 则 $\sum U_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上 一致收敛, 且

$$\frac{d}{dx}(\sum U_n(x)) = \sum \frac{d}{dx} U_n(x)$$

一定要注意

* 注: 上述例题中, 可同时修改为 $[a, b] \rightarrow$ 区间 I
一致收敛 $\rightarrow$ 内闭一致收敛

例: 设 $U_n(x) = \frac{1}{n^3} \ln(1+n^2x)$, $n=1, 2, \dots$

证明: $\sum U_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上 一致收敛, 并讨论其和函数在 $[0, 1]$ 上的可微性、可积性、连续性

① 证: $\forall n \geq 1, \forall x \in [0, 1]$

$$\left| \frac{1}{n^3} \ln(1+n^2x) \right| \leq \left| \frac{1}{n^3} \ln(1+n^2) \right| \leq \frac{\ln 2}{n^3} + \frac{2 \ln n}{n^3}$$

由 $\sum (\frac{\ln 2}{n^3} + \frac{2 \ln n}{n^3})$ 收敛, 利用 W -判别法, 可得

$\sum U_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上 一致收敛

② 由于 $\forall n \geq 1, U_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 由一致收敛的连续性定理

$\sum U_n(x)$ 的和函数在 $[0, 1]$ 上连续

又由可积性定理, $S(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可积, 且

$$\int_0^1 S(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{1}{n^3} \ln(1+n^2x^2) dx$$

③ 可微性: $U_n'(x) = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{2n^2x}{1+n^2x^2} = \frac{2x}{n(1+n^2x^2)}$

对 $\forall n \geq 1, \forall x \in [0, 1]$

$$|U_n'(x)| \leq \frac{2x}{n \cdot 2nx} = \frac{1}{n^2}$$

当 $x=0$ 时, 也有 $|U_n'(x)| \leq \frac{1}{n^2}$

由 $\sum \frac{1}{n^2}$ 收敛, 利用 W -判别法, $\sum U_n'(x)$ 在 $[0, 1]$ 上 一致收敛

从而由可微性定理, $S(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可导, 且

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{n(1+n^2x^2)}$$

10.3 幂级数

2024年3月14日 星期四 14:35

定义：幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots$$

 的函数项级数为幂级数，其中 $\forall n \geq 0, a_n \in \mathbb{R}$ 为常数，称其为幂级数的级数， $x_0 \in \mathbb{R}$ 为常数。

只需研究 $x_0=0$ 的情形

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots \quad (2)$$

Abel 第一定理 若幂级数(2)在点 x_0 处收敛，则对于任意满足 $|x| < |x_0|$ 的 x ，必有幂级数(2)在点 x 处绝对收敛。

证：只需注意到

$$|a_n x^n| = |a_n \frac{x}{x_0}| \cdot |\frac{x}{x_0}|^n \leq M \cdot |\frac{x}{x_0}|^n$$

(由 $\sum a_n \frac{x}{x_0}$ 收敛，可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \frac{x}{x_0} = 0$ ，从而 $\{a_n \frac{x}{x_0}\}$ 有界)
 于是 $\exists M > 0$ ，使 $\forall n \geq 0$ ，有 $|a_n \frac{x}{x_0}| \leq M$
 由 $|x| < |x_0|$ ，有 $|\frac{x}{x_0}| < 1$ ，从而 $\sum M |\frac{x}{x_0}|^n$ 收敛 [比较判别法]

$$\text{令 } R = \sup \{ |x| : \sum a_n x^n \text{ 收敛} \}$$

$$= \sup \{ |x| : \sum |a_n x^n| \text{ 收敛} \}$$

则当 $|x| < R$ 时，幂级数(2)在 x 处绝对收敛

则当 $|x| > R$ 时，幂级数(2)在 x 处发散

则当 $|x| = R$ 时，幂级数(2)在 x 处绝对收敛或发散。

若 $R=0$ ，幂级数(2)仅在 $x=0$ 处收敛

若 $R=+\infty$ ，则 $\forall x \in \mathbb{R}$ ，幂级数(2)在 x 处绝对收敛

称 R 为幂级数(2)的收敛半径
 $(-R, R)$ 为幂级数(2)的收敛区间 $\neq$ 收敛域 (差 2 个特定)

定理 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho \in [0, +\infty]$ 则 $R = \frac{1}{\rho} = \begin{cases} +\infty, & \rho=0 \\ 0, & \rho=+\infty \\ \frac{1}{\rho}, & \text{else} \end{cases}$
 (可称为上极限)

证：注意到 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} = \rho$

因此当 $\rho=0$ 时， $\forall x \in \mathbb{R}$ ， $|x| \cdot \rho = 0$ ， $\sum |a_n x^n|$ 收敛 $\Rightarrow R=+\infty$

当 $\rho=+\infty$ 时， $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ， $|x| \cdot \rho = +\infty$ 发散 $\Rightarrow R=0$

当 $0 < \rho < +\infty$ 时，当 $|x| < \frac{1}{\rho}$ 时， $|a_n x^n|$ 收敛
 当 $|x| > \frac{1}{\rho}$ 时， $|a_n x^n|$ 发散 $\Rightarrow R = \frac{1}{\rho}$

推论：若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho \in [0, +\infty]$ 则 $R = \frac{1}{\rho}$

Abel 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R > 0$ ，则

- 幂级数(2)在 $(-R, R)$ 内是内闭一致收敛的
- 若幂级数(2)在 $x=R$ 处收敛 (或在 $x=-R$ 处收敛)
 则在 $[0, R]$ 上一致收敛 (在 $[-R, 0]$ 上一致收敛)

证：1) $\forall [c, d] \subset (-R, R)$ 令 $\xi = \max\{|c|, |d|\}$

则 $\forall x \in [c, d]$ ，有 $|x| \leq \xi$

注意到 $\forall n \geq 1, \forall x \in [c, d]$ ，有 $|a_n x^n| \leq |a_n| \xi^n$

由于 $\sum |a_n| \xi^n$ 收敛，由 Weierstrass 判别法，幂级数(2)在 $[c, d]$ 上一致收敛

2) 注意到 $a_n x^n = a_n R^n \cdot (\frac{x}{R})^n$

令 $u_n(x) = a_n R^n, v_n(x) = (\frac{x}{R})^n, x \in [0, R]$

则 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[0, R]$ 上一致收敛

$\forall x \in [0, R], \{v_n(x)\}$ 关于 n 单调

$\forall x \in [0, R], \forall n \geq 1 |v_n(x)| \leq 1$

由一致收敛的 Abel 判别法，从而得证。

注意到：若 $\sum u_n(x)$ 在 D_1 及 D_2 上都一致收敛，则 $\sum u_n(x)$

在 $D_1 \cup D_2$ 上也一致收敛，从而幂级数(2)在收敛域中是

内闭一致收敛的

连续性：幂级数在其收敛域中是连续的

可积性： $\forall [a, b] \subset$ 幂级数(2)的收敛域，必有幂级数(2)的和函数在 $[a, b]$ 上可积，且

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b x^n dx$$

特别地，取 $a=0, b=x \in$ 收敛域，有

$$\int_0^x (\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \quad (3)$$

由上可得：(2)的收敛域 $\supset$ (3)的收敛域 $\Rightarrow R_{(2)} \geq R_{(3)}$

证：证 $R_3 \leq R_2$

只需：任取 x 满足 $|x| < R_3$ ，必有 (2) 在 x 处绝对收敛

取 ξ ，使 $|x| < \xi < R_3$

$$|a_n x^n| = |\frac{a_n}{n!} \xi^n| \cdot |\frac{x}{\xi}|^n \cdot |\frac{\xi}{x}|^n$$

由根式判别法 $\sum (n!) |\frac{\xi}{x}|^n$ 收敛 $\Rightarrow$

故 $R_3 = R_2$ (是 R !)

* 但是收敛域可能会发生变化 (收敛半径不变)

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 收敛域 $(-1, 1)$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$ 收敛域 $[-1, 1]$

原级数收敛的点移后可能收敛 (移后收敛)

可微性：幂级数在其收敛区间内是可导的，且

$$\frac{d}{dx} (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad x \in (-R, R)$$

理由：1) 在 $(-R, R)$ 中是内闭一致收敛的

幂级数(4)的收敛半径 = 幂级数(2)的收敛半径 (由可微性定理)

2) (4) 在 $(-R, R)$ 内一致收敛

推论：设 f 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ 在 (x_0-r, x_0+r) 的和函数，则 f 在 (x_0-r, x_0+r) 内任意次可导，且有

$$f^{(k)} = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \dots (n-k+1) a_n (x-x_0)^{n-k} \quad k \geq 1$$

将 $x=x_0$ 代入上式，可得 $f^{(k)}(x_0) = k! a_k \Rightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$

特别地，当 $x_0=0$ 时，有 $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, k \geq 1$ ($k=0$ 时亦成立)

幂级数(1)的系数由其和函数在 x_0 处的各阶导数所确定

性质：设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 均收敛，且 $C_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}, n \geq 0$

$$\text{则 } \sum_{n=0}^{\infty} C_n = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n) (\sum_{n=0}^{\infty} b_n)$$

$$\text{令 } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

则由条件及幂级数的连续性， f, g, h 都在 $(-1, 1)$ 上连续

而且这三个级数的收敛半径 ≥ 1

于是 $\forall x \in (-1, 1)$ ，这三个幂级数绝对收敛，又注意到

$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ 是 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的柯西乘积有

$$h(x) = f(x) g(x), \quad x \in (-1, 1)$$

令 $x \rightarrow 1^-$ ，可得 $C = AB$

例：考察幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$

收敛域： $(-1, 1)$ 和函数 $f(x) = \frac{1}{1-x}$

逐项求导 $\frac{1}{(1-x)^2} = f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}, x \in (-1, 1)$

逐项求积： $\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x t^n dt$
 $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, x \in (-1, 1) \quad (3)$

2) 的收敛域： $[-1, 1)$ ，当 $x=-1$ 时，上式左边 $= -\ln 2$

在 (3) 式中，令 $x \rightarrow (-1)^+$ (均为右连续)

$$\text{从而 } -\ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$$

例：求 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^2 x^n$ 的和函数

解：收敛域： $(-1, 1)$ (记为 $f(x)$)

设 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^2 x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^2 x^{n-1}, x \in (-1, 1)$

有 $\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^2 \int_0^x t^{n-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n x^n$
 $= x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n x^{n-1} \xrightarrow{g(x)} g(x)$

则 $\int_0^x g(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^2 x^n = x \cdot \frac{x}{1-x} = \frac{x^2}{1-x}$

$\Rightarrow g(x) = (\frac{x^2}{1-x})' = \dots \quad S(x) = x f(x) = \dots$

$f(x) = [x g(x)]' = \dots$

例：求 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n+1}}{(2n)! - 1}$ 的收敛域及和函数

令 $u_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{x^{2n+1}}{(2n)! - 1}$

则当 $x \neq 0$ 时， $|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}| \rightarrow x^2 (n \rightarrow \infty)$

$\Rightarrow$ 收敛半径为 1，当 $x=\pm 1$ 时

$\sum |u_n(x)| = \sum \frac{1}{(2n)! - 1}$ 收敛，故收敛域为 $[-1, 1]$

令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n+1}}{(2n)! - 1}$

则 $\forall x \in (-1, 1)$ 有

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{2n-1} = x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \xrightarrow{f(x)} f(x)$$

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-1}$

$$= \frac{1}{1-x^2}$$

$\Rightarrow f(x) = \int_0^x f(t) dt + f(0) \quad \Delta$

$\Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow f(x) = \arctan x$

$S(x) = \int_0^x t \arctan t dt + S(0)$

例：求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n}$ 之和。

解： $\frac{2n+1}{3^n} = 2 \frac{n}{3^n} + \frac{1}{3^n}$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$ 在 $(-1, 1)$ 内收敛，所以令

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n \quad x \in (-1, 1)$$

$\dots$

10.4 函数的幂级数展开

2024年3月19日 星期二 10:31

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + R_n(x)$$

设 f 在 x_0 处无穷次可导, 则称

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \rightarrow S(x) \quad \leftarrow \text{即对函数 } f$$

为 f 在点 x_0 处的幂级数 (或称泰勒级数)

$x_0=0$ 处的泰勒级数称作麦克劳林级数

问: (1) 泰勒级数的收敛域?

(2) 在泰勒级数的收敛域内, 是否一定有泰勒级数的和函数 $= f(x)$?

$$\text{例: 令 } f(x) = \begin{cases} e^{-x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{则 } f^{(k)}(0) = 0, \quad \forall k \geq 0$$

在 $x_0=0$ 处, f 的泰勒级数为 $\sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot x^n$

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

$$S(x) = f(x) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) = f(x)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x) - T_n(x)) = 0 \quad \text{即 } \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

定理: 在 (x_0-r, x_0+r) 内, f 的泰勒级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$ 的和函数等于 $f(x)$

$$\Leftrightarrow \forall x \in (x_0-r, x_0+r), \text{ 有 } \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

定义: 若 $\forall x \in (x_0-r, x_0+r)$ (其中 $r>0$), 有

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad (*)$$

则称 f 可以在 (x_0-r, x_0+r) 展开为泰勒级数

并且把幂级数 $(*)$ 记作 f 在 (x_0-r, x_0+r) 内的泰勒展开式 (或幂级数展开式)

注: 若 $r>0$, 且 $\forall x \in (x_0-r, x_0+r)$, 有 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$

则必有 $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ (唯一性)

当 $x_0=0$ 时 麦克劳林展开

$$0 \text{ 点处泰勒级数型} \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad \text{其中 } 0 \leq \theta \leq 1$$

$$\text{积分型余项} \quad R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt$$

$$\text{柯西型余项} \quad R_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\theta x) (1-\theta)^n x^{n+1}, \quad \text{其中 } 0 \leq \theta \leq 1$$

定理1: 设 $\exists M>0$, 对于 $\forall x \in (x_0-r, x_0+r)$, 当 n 充分大时 (即 $\exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n>N$ 时)

有 $|f^{(n)}(x)| \leq M$, 则 $\forall x \in (x_0-r, x_0+r)$ 有

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \quad \leftarrow \text{Lagrange 余项}$$

$$\text{当 } n \text{ 充分大时, } |R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x-x_0|^{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty)$$

一些初等函数的麦克劳林展开式

例1: $f(x) = e^x$

$$f \text{ 的 } M\text{-级数为 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

$$\text{由于 } f^{(n)}(x) = e^x, \quad \forall n \geq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{因此 } \forall r>0, \quad \forall n \geq 1, \quad \forall x \in (-r, r), \text{ 有 } |f^{(n)}(x)| = e^x \leq e^r$$

$$\text{于是由定理1, } e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, \quad x \in (-r, r),$$

又由 r 的任意性, 上式对于任意的 $x \in \mathbb{R}$ 成立

例2: $f(x) = \sin x$

$$\text{由 } f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n-1}{2}\pi), \quad \forall n \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{可得 } f^{(n)}(0) = \sin(\frac{n-1}{2}\pi) = \begin{cases} 0, & n \text{ 偶} \\ (-1)^{m-1}, & n=2m-1 \quad m \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$$

$$f \text{ 的 } M\text{-级数为 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!} x^{2m-1}$$

$$\text{由于 } \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \geq 1, \text{ 有 } |f^{(n)}(x)| \leq 1$$

$$\text{于是由定理1, } \forall x \in \mathbb{R}, \text{ 有 } \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!} x^{2m-1}$$

同理对于 $f(x) = \cos x$, 有 $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

例3: $f(x) = (1+x)^{\alpha}$

(1) 若 $\alpha \in \mathbb{Z}^+$, 此时

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}, & k \leq \alpha \\ 0, & k > \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{(k)}(0) = \begin{cases} \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1), & k \leq \alpha \\ 0, & k > \alpha \quad (\text{取 } M=\varepsilon, \text{ 当 } n>m \text{ 时即可}) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 由定理1, $\forall x \in \mathbb{R}$, 有

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\alpha} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k$$
$$= \sum_{k=0}^{\alpha} \frac{M!}{(M-k)!k!} x^k \quad \text{二项式展开}$$

(2) 若 $\alpha \in \mathbb{Z}^+$ (或不是0)

$$\text{此时 } \forall k \geq 1, \quad f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$$

$$f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)$$

$$\text{又 } f(0)=1$$

$$\text{从而 } f \text{ 的 } M\text{-级数为 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

收敛半径 $= 1$

$$\forall x \in (-1, 1)$$

$$L\text{-型: } \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!} (1-\theta)x^{\alpha-n-1} (1-\theta)^n x^{n+1}$$
$$= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!} (1-\theta)^{n+1} x^{\alpha-n-1} (1-\theta)^n x^{n+1} = (1-\theta)^{\alpha} \cdot \left(\frac{x}{1-\theta}\right)^{\alpha-n-1}$$

$$C\text{-型: } \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!} \cdot (1-\theta)x^{\alpha-n-1} \cdot (1-\theta)^n x^{n+1} \rightarrow \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!} \left| \frac{(1-\theta)}{1+\theta x} \right|^n |1+\theta x|^{\alpha-n-1}$$
$$= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!} |x|^{n+1} \left| \frac{(1-\theta)}{1+\theta x} \right|^n |1+\theta x|^{\alpha-n-1}$$

又要证: $(1+\theta x)^{\alpha-n-1}$ 有界 (与 θ 无关的常数)

$$0 < 1-|x| \leq 1+\theta x \leq 1+|x|$$

$$f(x) = e^{x^2-1} \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调}$$

$$\text{所以 } (1+\theta x)^{\alpha-n-1} \leq \max\{ (1-|x|)^{\alpha-n-1}, (1+|x|)^{\alpha-n-1} \}$$

$$\text{从而 } \left| \frac{(1-\theta)}{1+\theta x} \right|^n \leq 1, \quad \left| \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!} \right| |x|^{n+1} \text{ 趋于 } 0, \text{ 当 } n \text{ 充分大时}$$

$$|1+\theta x|^{\alpha-n-1} \text{ 有界}$$

$$\text{故结论成立! } (1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \quad (*)$$

当 $\alpha \leq -1$ 时, 收敛域为 $(-1, 1)$

当 $-1 < \alpha < 0$ 时, 收敛域为 $(-1, 1]$

当 $\alpha = 0$ 时, 收敛域 $[-1, 1]$

又 $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (1+x)^{\alpha}$ 在 $x=1$ 处连续

且 $\alpha > 0$ 时, $(1+x)^{\alpha}$ 在 $x=-1$ 处右连续

证明 所以在收敛域内, 有 $(*)$ 式成立

例: $\ln(1+x)$

$$\text{当 } \alpha = -1, \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad x \in (-1, 1) \quad (*)$$

$$\text{逐项求积, 得 } \int_x^0 \frac{1}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n dt$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}, \quad x \in (-1, 1)$$

在 $(*)$ 式中, 用 x^2 代替 x , 可得

$$x \in (-1, 1) \Leftrightarrow x^2 \in (-1, 1)$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad x \in (-1, 1)$$

$$\text{逐项求积, 得 } \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad x \in (-1, 1) \quad (\Delta)$$

$$\text{当 } \alpha = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{2n-1}{2})}{n!}$$
$$= \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n \cdot n!} = \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!}$$

$$\text{从而 } \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!} x^n, \quad x \in (-1, 1)$$

用 $(-x^2)$ 代替 x 可得

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}, \quad x \in (-1, 1)$$

$$\text{逐项求积, 得 } \arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in [-1, 1]$$

$$\text{在 } (\Delta) \text{ 中代 } x = \frac{1}{2}, \quad \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

例: 求 $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ 在 $x=1$ 处的幂级数展开式

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1+(x-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n, \quad x \in (0, 2)$$

逐项求导, 得 $-\frac{1}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n (x-1)^{n-1}$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n (x-1)^{n-1}, \quad x \in (0, 2)$$

例: 求 $f(x) = \frac{1}{3+5x-2x^2}$ 的 M -展开式

$$f(x) = \frac{1}{(3-x)(1+2x)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3-x} + \frac{2}{1+2x} \right)$$

$$\text{由于 } \frac{1}{3-x} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1-\frac{x}{3}} \right) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3} \right)^n, \quad x \in (-3, 3)$$

$$\frac{1}{1+2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2x)^n, \quad x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} \left(\frac{x}{3} \right)^n + 2 \cdot (-2x)^n \right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3^{n+1}} + (-1)^n 2^{n+1} \right) x^{n+1}, \quad x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

$$\text{加截: } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in (-R_1, R_1)$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad x \in (-R_2, R_2)$$

$$\text{则 } f(x)+g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n) x^n$$

$$x \in (-R, R) \quad \text{其中 } R = \min\{R_1, R_2\}$$

同时, 当 $x \in (-R, R)$ 时, 有

$$\text{乘: } f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad \text{其中 } c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

例: 求 $f(x) = e^x \sin x$ 的 M -展开式

$$f(x) = (1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots) \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \right)$$
$$= x + x^2 + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \right) x^3 + \cdots \quad x \in \mathbb{R}$$

例: 设 f 与 g 的 M -展开式同上, 且 $b_0 \neq 0$

求 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 的 M -展开式

用待定系数法, 设 $\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

$$\text{则 } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$$

其中 $d_n = \sum_{k=0}^n b_k c_{n-k}$ (建立在 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ $R>0$ 的前提下)

比较 x^n 的系数, 可得

$$a_0 = b_0 c_0 \Rightarrow c_0 = \frac{a_0}{b_0}$$

$$a_1 = b_0 c_1 + b_1 c_0 \Rightarrow c_1 = \frac{a_1 - b_1 c_0}{b_0}$$

:

性质: 设 f 为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ 上的和函数

若 f 为奇函数, 则 $a_{2n} = 0 \quad n=0, 1, 2, \dots$

若 f 为偶函数, 则 $a_{2n+1} = 0 \quad n=0, 1, 2, \dots$

例: 求 $f(x) = \tan x$ 的 M -展开式

法1: 设 $\frac{x}{\cos x} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 则由 $\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$, 得

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \right) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\text{从而 } 0 = 1 - a_0 \Rightarrow a_0 = 0$$

$$1 = 1 - a_1 \Rightarrow a_1 = 1 \quad \cdots$$

$$\text{法2: } \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{1-(1-\cos x)}$$

$$= 1 + (1-\cos x) + (1-\cos x)^2 + \cdots \quad (\text{只要 } |1-\cos x| < 1)$$

$$= 1 + \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \cdots \right) + \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \cdots \right)^2 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} \right) x^2 + \cdots \quad \left. \begin{matrix} \cos x > 0 \\ + x \in 0 \text{ 点邻域} \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

$$\text{例: 求 } f(x) = \begin{cases} \ln \frac{\sin x}{x}, & x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ 的 } M\text{-展开式}$$

(复合函数求 M -展开式)

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots, \quad x \in (-R, R)$$

$$\text{又 } \ln(1+u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} u^n$$

$$\ln(1+\frac{\sin x}{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots \right) = -\frac{1}{3} x^2 + \cdots$$

逐项求导, 得 $\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, x \in [-1, 1]$

在(6)中代 $\lambda = \frac{\pi}{4}$ 得 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$

代入 $\frac{\pi}{6}$ 得 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\frac{\sqrt{3}}{2})^n}{2n+1}$

常见麦克劳林展开式

2024年3月22日 星期五 19:34

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

$$\sin x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!} x^{2m-1}$$

$$\cos x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m}$$

$$(x+1)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_\alpha^n x^n$$

$$\frac{1}{x+1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$